УДК 517.91/.93 + 517.95 + 550.34 + 550.34.01 + 550.344

РАССЕЯНИЕ УПРУГИХ ВОЛН ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫМ ОГРАНИЧЕННЫМ ОБЪЕКТОМ

Сурнев В. Б., Исламгалиев Д. В.

В статье описана математическая модель рассеяния упругих (сейсмических) волн предварительно напряженной ограниченной неоднородностью. Приведен вывод интегральных уравнений, обобщающих известные уравнения теории рассеяния упругих волн на случай предварительно напряженной неоднородности, без использования общей теории распространения волн в среде с предварительными напряжениями. Предлагается алгоритм численного моделирования рассеяния упругих волн на основе полученных уравнений.
Ключевые слова: *гетерогенная среда; теория рассеяния; упругие волны; интегральные уравнения; предварительные напряжения.*

Вводные замечания. Модель гетерогенной среды можно представить как сплошную однородную (фоновую) среду, в которой имеются как неоднородности, которые можно описать непрерывными функциями, так и локализованные включения с резкими границами. В общем случае предполагается, что неоднородности распределены случайным образом по некоторому закону [1]. Основой теории распространения волн, в частности, упругих, в гетерогенной среде является теория элементарного акта рассеяния волн уединённой неоднородностью [2, 3]. В статье рассматривается развитие теории элементарного акта рассеяния упругих (сейсмических) волн на случай локализованной предварительно напряженной неоднородности земной коры.

На рис. 1 в качестве примера гетерогенной среды изображен сильно упрощенный вариант типичного геологического разреза [4], отражающий известный из эксперимента факт того, что в твёрдой Земле в большом числе имеются локализованные неоднородности. Существование этих неоднородностей может быть обусловлено многими геологическими причинами, например, неоднородностью вещественного состава, наличием областей концентрации тектонических напряжений и т. д., причём характерный размер этих неоднородностей может варьироваться в широких пределах. Наиболее сложным для изучения является случай, когда характерные размеры неоднородностей сравнимы или меньше длин распространяющихся в фоновой среде упругих (сейсмических) волн. Наличие таких неоднородностей в геологической среде приводит к тому, что процессы рассеяния сейсмических волн приобретают существенное значение для физики распространения последних [4, 5]. Таким образом, геологическая среда является характерным примером гетерогенной среды.

Ещё одним примером гетерогенных сред являются композиционные материалы (композиты), которые повсеместно встречаются в технике, например, в самолётостроении, строительстве и т. д. С композиционными материалами мы постоянно встречаемся в повседневной жизни. Так, например, стены наших домов, построенные из бетонных панелей, армированных металлическими стержнями, являются типичным композитом, не говоря уже о кирпичной кладке, которая является, по существу, в высокой степени упорядоченным композитом.

Композиты обладают многими полезными свойствами, такими как повышенная прочность, небольшой по сравнению с аналогичными по свойствам однородными материалами удельный вес и т. д., а широкое применение композитов обусловливает необходимость прогнозирования их свойств и поведения при различных внешних воздействиях. Такой прогноз может быть основан на сборе большого числа экспериментальных данных и поиске эмпирических формул, моделирующих поведение композитов. Однако такие подходы, будучи в некоторых случаях удовлетворительными для нужд практики, ограничены и по понятным причинам вряд ли могут удовлетворить с точки зрения по-

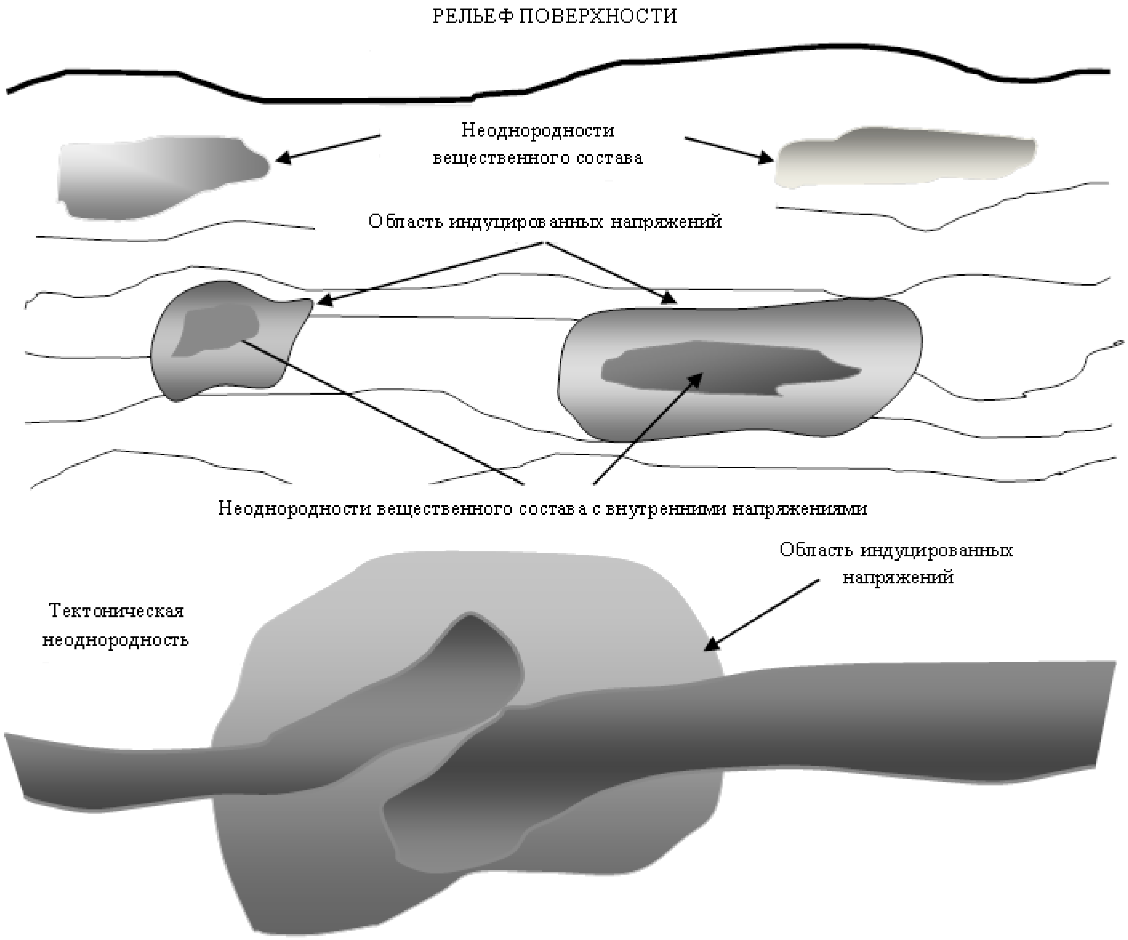

Рис. 1. Упрощенный вариант типичного геологического разреза

строения общей теории композитов, которая может только дать методы прогноза их свойств. Прогнозирование свойств и поведения композитов в настоящее время основано на математическом моделировании, как самих материалов, так и процессов, происходящих в них. Наиболее полное изложение теории распространения (рассеяния) упругих волн в композитах приведено в работе [5], в которой изложены некоторые математические модели волновых процессов в упорядоченных и случайно неоднородных композитах.

Отметим, что теория элементарного акта рассеяния (на одной локализованной неоднородности), развитая в работах [3, 6, 7], не описывает всё многообразие процессов рассеяния упругих волн в гетерогенной среде. Действительно, при построении теории считается, что материальные параметры среды, а именно, модули упругости, которые в простейшем случае изотропии сводятся к двум параметрам Ламе, и массовая плотность среды являются функциями координат, причём неявно предполагается, что зависимость материальных параметров моделируемой среды от координат описывает неоднородность её вещественного состава. В качестве примеров можно привести следующие объекты: локализованное рудное месторождение, нефтяная ловушка и тому подобные объекты в геологии; щебёнка, или арматура в бетоне в индустрии стройматериалов. Можно привести множество других примеров, на которых мы не останавливаемся.

Известно, однако, что материальные параметры среды, например модули упругости, являясь компонентами тензора четвертой валентности (везде дальше встречающиеся символы $i, j, k, l, p, q,...$ независимо друг от друга принимают значения 1, 2, 3), определяются в соответствие с реализующимися в упругой среде термодинамическими условиями и выражаются следующей формулой [4]:

$$c_{ijkl}^{(p)} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)_{p = const},$$

где p – соответствующий термодинамический параметр. В случае, когда в качестве термодинамического параметра используется энтропия σ, модули упругости называются изоэнтропическими, если абсолютная температура θ – модули упругости называются изотермическими и т. д. Таким образом, модули упругости определяются для фиксированных термодинамических условий, а их значения, в общем, зависят от значений термодинамических параметров, при которых модули определяются.

Для модулей упругости, определенных при соответствующих термодинамических условиях, выполняется условие симметрии Максвелла [4], а именно: перестановка пары двух первых индексов с парой двух последних индексов в тензоре модулей упругости не меняет величины изоэнтропических, изотермических и пр. модулей упругости. Таким образом, в естественных условиях для модулей упругости выполняются следующие известные соотношения:

$$c_{ijkl}^{(p)} = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial S_{ij} \partial S_{kl}} \right)_{p = const} = c_{klij}^{(p)}.$$

На практике, однако, часто реализуется случай, когда модули упругости объекта могут зависеть от внешних, или внутренних факторов, не связанных напрямую с изменением термодинамического состояния упругой среды. Так, например, если под термодинамическим параметром p подразумевается давление, то можно определить изобарические модули упругости, значения которых зависят от компонент тензора предварительных напряжений в упругой среде, причём значения последних в свою очередь определяются силовыми воздействиями со стороны внешних по отношению к выделенному объёму среды объектов или внутренних процессов, имеющих механический характер. Таковыми являются тектонические и техногенные процессы в геологии, процессы нагружения конструкций в строительстве и так далее. Поэтому при математическом моделировании рассеяния сейсмических волн неоднородностью среды желательно уметь разделять вклады в рассеяние, обусловленные как изменяющимся вещественным составом среды, так и наличием поля внутренних напряжений в объекте исследования, индуцирующих поле предварительных напряжений в окружающей среде. Такое разделение крайне полезно, например, при математическом моделировании рассеяния упругих волн нефтяной ловушкой, внутри которой существует избыточное давление, или при моделировании рассеяния упругих волн на тектоническом объекте. Действительно, такое моделирование позволит изучить динамику напряжённого состояния объекта исследования.

Формально можно считать, что координатная зависимость модулей упругости от вариации вещественного состава и от предварительных напряжений в среде учитывается теорией рассеяния упругих волн, которая основана на формализме теории возмущений для решения уравнений движения [7]:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^j} \left[c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k} \right] + \rho f^i.$$

В теории возмущений предполагается, что модули упругости зависят от координат точки сплошной среды, то есть

$$c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) \equiv c_{ijkl}(\vec{x})$$

и могут быть представлены в виде

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) \equiv c_{ijkl}^0 + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

Величины Δc_{ijkl}, зависящие от пространственных координат, называются вариациями, или флуктуациями модулей упругости и позволяют смоделировать наличие в среде неоднородностей [8].

Соотношение (1) – это, по существу, линейное приближение в разложении компонент тензора $c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3)$ в ряд Тейлора по координатам точки наблюдения. Если предположить, что модули упругости зависят также от предварительных напряжений в среде, т. е. $c_{ijkl} = c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq})$, то можно в линейном приближении записать соотношения, аналогичные (1):

$$c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) \equiv c^0_{ijkl} + \Delta c_{ijkl}(x_1, x_2, x_3) + \\ + \Delta c^*_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq}). \quad (2)$$

В формуле (2) первое слагаемое – модули упругости однородной фоновой среды, второе слагаемое – вариации модулей упругости, обусловленные неоднородностью вещественного состава, а третье слагаемое – вариации модулей упругости, обусловленные наличием процессов, вызывающих появление предварительных напряжений в среде.

Нужно учитывать, что воздействия, генерирующие предварительные напряжения в среде, могут нарушать симметрию тензора модулей упругости вплоть до нарушения условий симметрии Максвелла. Следовательно, можно ожидать, что для объекта, который можно охарактеризовать флуктуациями модулей упругости, обусловленными как неоднородностью вещественного состава, так и предварительными напряжениями, будет справедливо условие «несимметричности»:

$$\Delta c^*_{ijkl}(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq}) \neq \Delta c^*_{klij}(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq}).$$

Это условие существенно изменит картину рассеянного объектом волнового поля, что может служить дополнительным прогностическим признаком, например, в динамической сейсморазведке.

Суммируя сказанное выше, можно сделать вывод, что разработка математических моделей элементарных актов рассеяния упругих волн локализованными неоднородностями, обусловленными как неоднородностью вещественного состава, так и наличием предварительных напряжений в сплошной среде, сохраняет актуальность в настоящее время.

Математическая модель объекта, или носитель модели. В данной статье рассматривается простейший вариант математической модели рассеяния упругих волн уединенным локализованным объектом, который может быть охарактеризован как предварительно напряженная неоднородность вещественного состава в однородной фоновой среде (рис. 2). Установим математическую модель

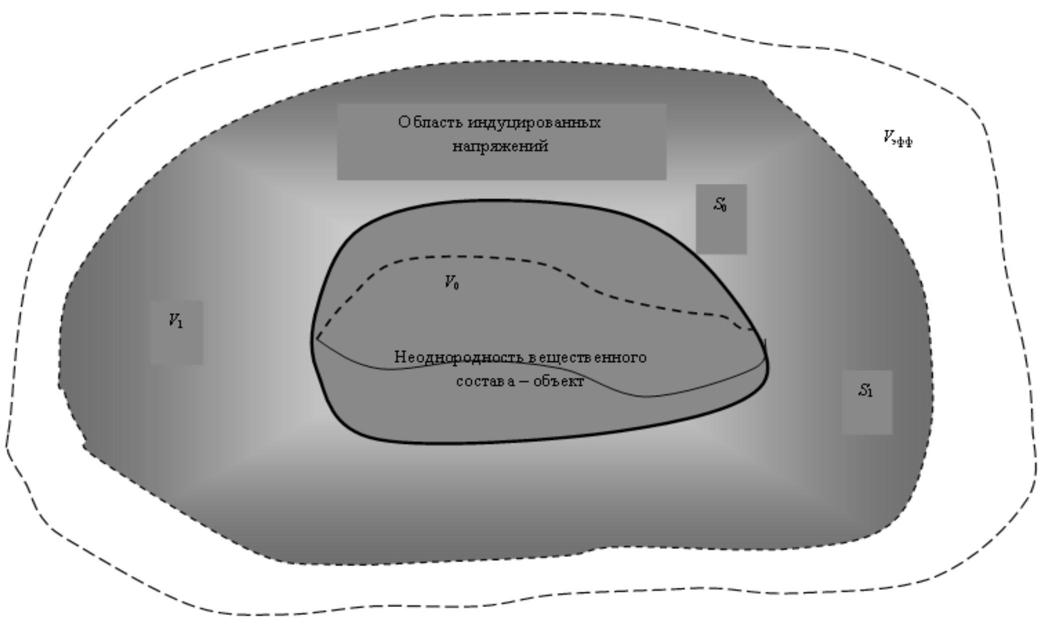

Рис. 2. Предварительно напряженная неоднородность вещественного состава в однородной фоновой среде

объекта, то есть опишем по терминологии теории систем носитель модели, который и является физической причиной уединенного акта рассеяния упругих волн, для чего обратимся к рис. 2.

На рисунке введены следующие обозначения: V_0 – неоднородность, обусловленная отличающимся от фоновой среды вещественным составом среды, – собственно рассеивающий объект; V_1 – неоднородность, обусловленная наличием поля предварительных напряжений объекта. Внешняя пунктирная линия – это условная граница эффективного объема неоднородности $V_{эфф}$, за пределами которого находится фоновая среда с постоянными материальными параметрами:

$$\rho = \rho_0, \; c_{ijkl} = c_{ijkl}^0. \tag{3}$$

Следовательно, в фоновой среде нет предварительных напряжений, а ее вещественный состав предполагается постоянным.

В идеальном случае эффективный объем неоднородности может быть представлен в виде $V_{эфф} \overset{def}{=} V_0 \cup V_1$.

Однако для численного моделирования удобно полагать (рис. 2), что полный объем неоднородности

$$V_0 \cup V_1 \subset\subset V_{эфф}, \tag{4}$$

то есть целиком заключен в $V_{эфф}$. Понятие эффективного объема неоднородности, введенное впервые в работе [8], позволит в дальнейшем при проведении выкладок отказаться от операции дифференцирования обобщенных функций, что значительно упростит все выводы.

В этих предположениях математическая модель объекта может быть описана соотношениями вида (2)

$$c_{ijkl}\left(x_1, x_2, x_3\right) \equiv c_{ijkl}^0 + \\ + \chi_0 \Delta c_{ijkl}\left(x_1, x_2, x_3\right) + \chi_1 \Delta c_{ijkl}^*\left(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq}\right), \tag{5}$$

где индикаторные, или характеристические функции области (далее просто функции области) определяются так:

$$\chi_0 = \chi_0\left(V_0\right) = \begin{cases} 1, \vec{x} \in V_0, \\ 0, \vec{x} \notin V_0, \end{cases} \quad \chi_1 = \chi_1\left(V_1\right) = \begin{cases} 1, \vec{x} \in V_1, \\ 0, \vec{x} \notin V_1. \end{cases}$$

К соотношениям (5) следует добавить аналогичное соотношение для массовой плотности:

$$\rho\left(x_1, x_2, x_3\right) \equiv \rho_0 + \chi_0 \Delta\rho\left(x_1, x_2, x_3\right) + \\ + \chi_1 \Delta\rho^*\left(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq}\right). \tag{6}$$

Здесь $\Delta\rho\left(x_1, x_2, x_3\right)$ – флуктуации массовой плотности, обусловленные изменением вещественного состава среды, а $\Delta\rho^*\left(x_1, x_2, x_3, \sigma_{pq}\right)$ – флуктуации массовой плотности, обусловленные наличием в среде предварительных напряжений.

Соотношения (3)–(6) задают математическую модель объекта, которая используется в данной статье для построения теории уединенного акта рассеяния упругой (сейсмической) волны.

Математическая модель процесса рассеяния, или сигнатура модели. В данной статье математическая модель процесса рассеяния упругих волн строится на основе уравнений движения линейно упругой неоднородной среды, которые по терминологии теории систем и составляют сигнатуру математической модели рассеяния. Опишем сигнатуру модели.

Уравнение распространения упругих волн для неоднородной среды в компонентной форме имеет вид [3]:

$$\rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^j}\left[c_{ijkl} \frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right] + \rho f^i, \tag{7}$$

где $i = 1, 2, 3$, а модули упругости c_{ijkl} и массовая плотность ρ выражаются формулами (5) и (6) соответственно (зависимость от времени для этих величин не предполагается – среда считается стационарной). Напомним, что при записи всех уравнений используется соглашение о суммировании: по дважды повторяющемуся индексу (один раз внизу и один раз вверху) производится суммирование от 1 до 3.

Для простоты далее рассматривается математическая модель процесса рассеяния гармонических упругих волн, то есть для всех полевых функций и внешних сил предполагается временная зависимость вида $\exp(-i\omega t)$. Для случая гармонических волн уравнение (7) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left[c_{ijkl}\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right]+\rho\omega^2 u^i=-\rho_0 f^i. \qquad (8)$$

В уравнении (8) ω – круговая частота упругой волны, генерируемой источником монохроматического сигнала, или гармоники в его разложении Фурье. В уравнении (8) учтено, что источники упругого возмущения среды находятся вне рассеивающего объекта (ситуация, реализующаяся, например, в сейсмической разведке и дефектоскопии) – в правой части уравнения в качестве множителя при объемной плотности силы стоит плотность фоновой среды. Подставляя в (8) формулы (5) и (6), после простых преобразований получим

$$c^0_{ijkl}\frac{\partial^2 u^l}{\partial x^j\partial x^k}(\vec{x})+\rho_0\omega^2 u^i(\vec{x})=$$
$$-\chi_0(V_0)\cdot\Delta\rho(\vec{x})\omega^2 u^i-$$
$$-\chi_1(V_1)\cdot\Delta\rho^*(\vec{x})\omega^2 u^i-\rho_0 f^i. \qquad (9)$$

Система уравнений (9) описывает собственно ***процесс рассеяния*** упругих волн неоднородным предварительно напряженным включением $V_0\bigcup V_1$, помещенным в однородную фоновую среду V, то есть является сигнатурой конструируемой математической модели.

Функция Грина дифференциального оператора в левой части (9) является решением уравнения

$$c^0_{ijkl}\frac{\partial^2}{\partial x^j\partial x^k}G_{jk}+\rho^0\omega^2 G_{ij}=$$
$$=-\delta_{ij}\delta(\vec{x}-\vec{x}_1). \qquad (10)$$

Получение решения уравнения (10) – функции Грина для упругих волн, – весьма подробно описано, например, в работе [6]. Выпишем лишь конечный результат – функцию Грина для неограниченной изотропной среды:

$$G_{mn}(\vec{x},\vec{x}_1,\omega)=\frac{1}{4\pi\rho\omega^2}\left[\delta_{mn}k_s^2\frac{\exp(ik_s r)}{r}\right]-$$
$$-\frac{\partial^2}{\partial x_m\partial x_n}\left(\frac{\exp(ik_p r)}{r}-\frac{\exp(ik_s r)}{r}\right). \qquad (11)$$

Здесь k_p и k_s – волновые числа для продольных и поперечных волн, соответственно, а $r=\|\vec{x}-\vec{x}_1\|$ – норма (длина) разности радиус-вектора $\vec{x}$ точки наблюдения и радиус-вектора $\vec{x}_1$ точки источника.

Используя принцип Дюамеля [9] и учитывая (11), запишем решение неоднородного уравнения (9) в следующем виде:

$$u^i(\vec{x})=\iiint\limits_{V_{\text{эфф}}}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\chi_0\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\chi_1\cdot\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]\right]+$$
$$+\chi_0(V_0)\Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2 u^p+$$
$$\left.+\chi_1(V_1)\Delta\rho^*(\vec{x}_1)\omega^2 u^p\right\}G_{ip}(\vec{x},\vec{x}_1,\omega)d\vec{x}_1+$$
$$+\rho^0\iiint\limits_{V'}f^p(\vec{x}_1)G_{ip}(\vec{x}_1,\vec{x}',\omega)d\vec{x}'. \qquad (12)$$

Второе слагаемое в правой части (12) интерпретируется как решение уравнения

$$c^0_{ijkl}\frac{\partial^2 u^l}{\partial x^j\partial x^k}+\rho^0\omega^2 u^i=-\rho^0 f^i, \qquad (13)$$

описывает распространение возмущения от источников поля, сосредоточенных в объеме V' однородной фоновой среды в отсутствие включения, и называется в теории рассеяния *падающим* или *первичным полем*. Обозначим компоненту с номером i = 1, 2, 3 первичного поля так:

$$u^i_{in}(\vec{x})\overset{def}{=}\rho^0\iiint\limits_{V'}f^l(\vec{x}_1)G_{il}(\vec{x},\vec{x}_1,\omega)d\vec{x}_1. \qquad (14)$$

Наличие первого слагаемого в правой части формулы (12) обусловлено влиянием вторичных источников поля, существующим благодаря флуктуациям модулей упругости $\Delta c_{ijkl}(\vec{x}_1)$, $\Delta c^*_{ijkl}(\vec{x}_1)$ и плотности $\Delta\rho(\vec{x}_1)$, $\Delta\rho^*(\vec{x}_1)$ в объеме неоднородности $V_0\bigcup V_1\subset V_{\text{эфф}}$, и называется *рассеянным полем*:

$$u^i_{scat}(\vec{x})\overset{def}{=}\iiint\limits_{V_{\text{эфф}}}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\chi_0\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\chi_1\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]\right]+$$

$$+\chi_0(V_0)\Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2u^p+$$

$$+\chi_1(V_1)\Delta\rho^*(\vec{x}_1)\omega^2u^p\Big\}G_{ip}(\vec{x},\vec{x}_1,\omega)\,d\vec{x}_1. \quad (15)$$

Интегрирование в уравнении (12) для удобства распространяется на эффективный объем среды $V_{\text{эфф}}$, что эквивалентно интегрированию по объему неоднородности $V_0\bigcup V_1$ в силу соотношений (5) и (6).

Таким образом, в предположении линейности процесса рассеяния ***полное волновое поле*** $u^i(\vec{x})$ (i = 1, 2, 3) в каждой точке $\vec{x}\in V$ объема среды

$$V=C(V_{\text{эфф}})\bigcup V_{\text{эфф}}\equiv C(V_{\text{эфф}})\bigcup(V_0\bigcup V_1)$$

представляется в виде суммы

$$u^i(\vec{x})=u^i_{in}(\vec{x})+u^i_{scat}(\vec{x}). \quad (16)$$

Отметим, что рассеянное поле в неограниченной среде должно удовлетворять ***условию излучения Зоммерфельда***, состоящему в том, что на бесконечно удаленной поверхности

$$\lim_{\|\vec{x}\|\to\infty}\frac{1}{\|\vec{x}\|}u^i_{scat}(\vec{x})=0.$$

Уравнение (12) является линейным интегральным уравнением типа Фредгольма. Наличие слагаемых

$$\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\chi_0\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\chi_1\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]$$

в уравнении затрудняет его численное решение. Если неоднородность имеет континуальный характер, то есть выраженная граница раздела неоднородности и фоновой среды отсутствует, то наличие производных приводит только к техническим трудностям при численном решении. Если же имеется «резкая» граница раздела, на которой функции $c_{ijkl}(\vec{x})$ и $\rho(\vec{x})$ испытывают разрыв первого рода (из физических соображений можно принять, что $c^*_{ijkl}(\vec{x}_1)$ и $\rho^*(\vec{x}_1)$ непрерывным образом продолжаются нулем за границу $V_{\text{эфф}}$), производные должны выражаться через δ-функции, что совершенно неприемлемо при численном решении. Для устранения этой особенности в работе [7] предложена предельная процедура, применение которой в рассматриваемом случае существенно отличается от простого случая, описанного в указанной работе. Описание этой процедуры приведено ниже.

Сначала заметим, что с учетом формулы дифференцирования произведения функций

$$\chi_0\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+\chi_1\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]$$

уравнение (12) можно представить в виде

$$u^i(\vec{x})=\iiint\limits_{V_{\text{эфф}}}\Bigg\{\chi_0(V_0)\Bigg[\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+$$

$$+\Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2u^p\Bigg]+\chi_1(V_1)\Bigg[\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+$$

$$+\Delta\rho^*(\vec{x}_1)\omega^2u^p\Bigg]\Bigg\}G_{ip}(\vec{x},\vec{x}_1,\omega)\,d\vec{x}_1+$$

$$+\rho^0\iiint\limits_{V'}f^p(\vec{x}_1)G_{ip}(\vec{x}_1,\vec{y},\omega)\,d\vec{y}. \quad (17)$$

Уравнение (17) перепишем, отделив вклады в рассеянное поле от неоднородностей вещественного состава и предварительных напряжений:

$$u^i(\vec{x})=u^i_{in}(\vec{x})+$$

$$+\iiint\limits_{V_{\text{эфф}}}\chi_0(V_0)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+$$

$$+\Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2u^p\Bigg\}G_{ip}(\vec{x},\vec{x}_1)\,d\vec{x}_1+$$

$$+\iiint\limits_{V_{\text{эфф}}}\chi_1(V_1)\Bigg\{\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\right]+$$

$$+\Delta\rho^*(\vec{x}_1)\omega^2u^p\Bigg\}G_{ip}(\vec{x},\vec{x}_1)\,d\vec{x}_1, \quad (18)$$

где мы обозначили

$$u^i_{in}(\vec{x})\overset{def}{=}\rho^0\iiint\limits_{V'}f^p(\vec{x}_1)G_{ip}(\vec{x}_1,\vec{y})\,d\vec{y}. \quad (19)$$

В формуле (19) $\vec{y}\in V'$ – радиус-вектор точек внешнего источника падающей волны, занимающего объем V'. Для упрощения записи было убрано обозначение зависимости от круговой частоты.

Очевидно, что в уравнении (18) в силу

свойств характеристических функций области $\chi_0(V_0)$ и $\chi_1(V_1)$ интегрирование распространяется соответственно в первом слагаемом на объем, занятый неоднородностью вещественного состава, то есть $\vec{x}_1 \in V_0$, а во втором слагаемом – на область напряженного состояния, то есть $\vec{x}_1 \in V_0 \bigcup V_1$. Таким образом, первое слагаемое переписывается в виде

$$\overset{0}{u}{}^i_{scat} = \iiint\limits_{V_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^j} \left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u^l}{\partial x_1^k} \right] + \right. \left. + \Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2 u^p \right\} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) d\vec{x}_1, \qquad (20)$$

а второе слагаемое в виде

$$\overset{1}{u}{}^i_{scat} = \iiint\limits_{V_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^j} \left[\Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u^l}{\partial x_1^k} \right] + \right. \left. + \Delta\rho^*(\vec{x}_1)\omega^2 u^p \right\} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) d\vec{x}_1. \qquad (21)$$

Теперь вместо (16) имеем

$$u^i(\vec{x}) = u^i_{in}(\vec{x}) + \overset{0}{u}{}^i_{scat}(\vec{x}) + \overset{1}{u}{}^i_{scat}(\vec{x}). \qquad (22)$$

Обратимся к рис. 3, на котором для простоты изображено сечение исследуемого объекта некоторой, например, координатной плоскостью. Заключим поверхности S_0 и S_1 неоднородностей вещественного состава и напряженного состояния в бесконечно тонкие слои $V_0^{\pm}$ и $V_1^{\pm}$, образованные двумя не соприкасающимися с S_0 и S_1 поверхностями S_0^-, S_0^+ и S_1^-, S_1^+ соответственно. Далее предположим, что Δc_{ijkl}, $\Delta\rho$, $\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\Delta c_{ijkl}\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right]$ и $\Delta\rho^*$, $\frac{\partial}{\partial x^j}\left[\Delta c^*_{ijkl}\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\right]$ меняются непрерывно от нуля до некоторого конечного значения на поверхностях S_0^+ и S_0^- и, соответственно, на поверхностях S_1^+ и S_1^-. В конечном итоге перейдем к пределу $V_0^{\pm} \to 0$ и $V_1^{\pm} \to 0$ в первом и втором интегральном слагаемом уравнения (18). Так как преобразования для обеих поверхностей S_0 и S_1 проводятся одинаково, то проведем их, например, для поверхности S_0. Интегральный член (20) – первое слагаемое в правой части уравнения (18), – преобразуется так:

$$\overset{0}{u}{}^i_{scat} = \iiint\limits_{V_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^j} \left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u^l}{\partial x_1^k} \right] + \Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2 u^p \right\} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) d\vec{x}_1 =$$
$$= \iiint\limits_{V_0^-} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^j} \left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u^l}{\partial x_1^k} \right] + \Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2 u^p \right\} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) d\vec{x}_1 +$$
$$+ \lim_{V_0^{\pm} \to 0} \iiint\limits_{V_0^{\pm}} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1^j} \left[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) \frac{\partial u^l}{\partial x_1^k} \right] + \Delta\rho(\vec{x}_1)\omega^2 u^p \right\} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) d\vec{x}_1. \qquad (23)$$

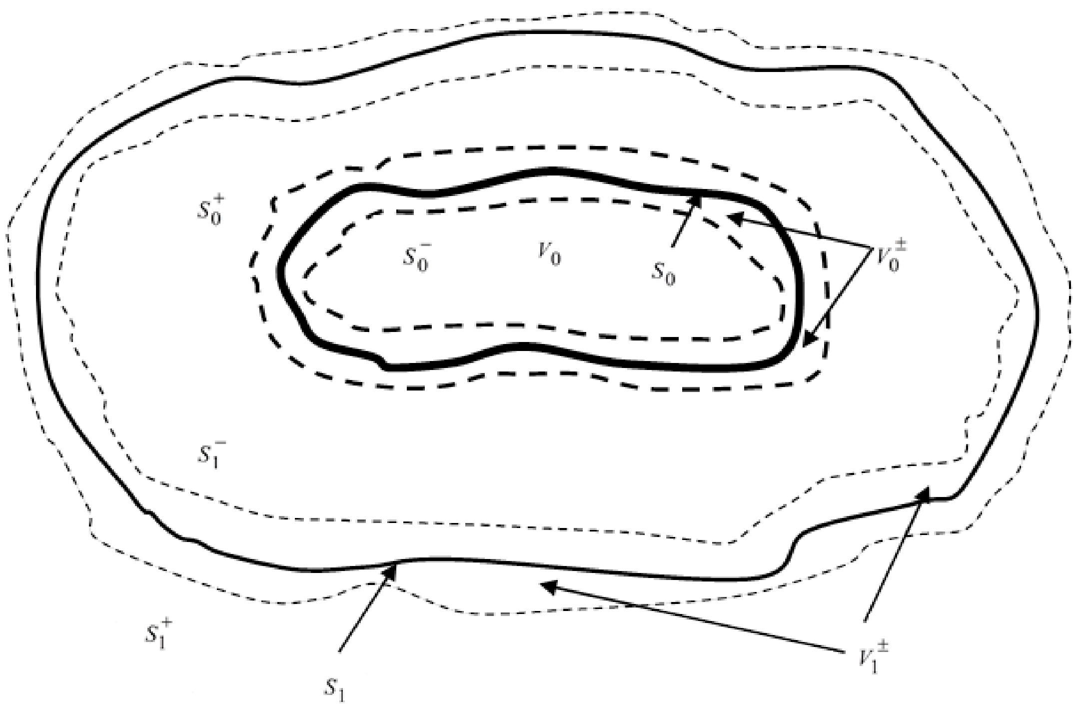

Рис. 3. Сечение исследуемого объекта некоторой плоскостью

Здесь V_0^- означает объем, ограниченный поверхностью S_0^-. Обозначим далее: V_0^+ – объем, ограниченный поверхность S_0^+. Далее введем обозначение для приграничного слоя неоднородности: $V_0^{\pm} = V_0^+ - V_0^-$.

Теперь интеграл во втором слагаемом в правой части (23), содержащий производные, используя теорему дифференцирования произведения функций, преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса в сумму двух поверхностных интегралов:

$$\iiint\limits_{V_0^{\pm}} \frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)\right]G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)d\vec{x}_1 =$$

$$=\iiint\limits_{V_0^{\pm}} \frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)\right]d\vec{x}_1 -$$

$$-\iiint\limits_{V_0^{\pm}} \Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1^j}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)d\vec{x}_1 =$$

$$=\oiint\limits_{S_0^+} n^j\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)ds^+ -$$

$$-\oiint\limits_{S_0^-} n^j\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)ds^- -$$

$$-\iiint\limits_{V_0^{\pm}} \Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1^j}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)d\vec{x}_1. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (23) и переходя к пределу при условии $V_0^{\pm} \to 0$ с учетом непрерывности флуктуаций Δc_{ijkl}, $\Delta\rho$ внутри и того, что на поверхности S_0^+ флуктуации Δc_{ijkl}, $\Delta\rho$ = 0, получим

$$\overset{0}{u}{}^i_{scat}\left(\vec{x}\right) = \lim_{V_0^{\pm}\to 0}\iiint\limits_{V_0^-}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x^k}\left(\vec{x}_1\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\Delta\rho\left(\vec{x}_1\right)\omega^2 u^p\left(\vec{x}_1\right)\right\}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)d\vec{x}_1 =$$

$$=\iiint\limits_{V_0}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left[\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\Delta\rho\left(\vec{x}_1\right)\omega^2 u^p\left(\vec{x}_1\right)G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1,\omega\right)\right\}d\vec{x}_1 -$$

$$-\lim_{V_0^{\pm}\to 0}\oiint\limits_{S^-} n^j\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)ds^-. \quad (25)$$

В правой части выражения (25) поверхностный интеграл преобразуем в объемный интеграл с учетом того, что при условии $V_0^{\pm} \to 0$

$$\lim_{V_0^{\pm}\to 0}\oiint\limits_{S_0^-} n^j\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1,\omega\right)ds^- =$$

$$=\oiint\limits_{S_0} n^j\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1,\omega\right)ds,$$

получим:

$$\oiint\limits_{S_0} n^j\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1,\omega\right)ds =$$

$$=\iiint\limits_{V_0}\frac{\partial}{\partial x_1^j}\left\{\left[\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)\right]G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1,\omega\right)\right\}d\vec{x}_1.$$

Используя полученный результат в выражении (25) для поля $u^i_{scat}\left(\vec{x}\right)$, рассеянного неоднородностью вещественного состава, проводя аналогичные выкладки для второго интеграла (21) и записывая аналогичное (25) равенство для поля $u^i_{scat}\left(\vec{x}\right)$, рассеянного распределением в пространстве предварительных напряжений, и, наконец, подставляя в (22), получим следующее интегральное уравнение для полного поля во всем пространстве R^3, как внутри неоднородности, так и вне ее:

$$u^i\left(\vec{x}\right) = u^i_{in}\left(\vec{x}\right) +$$

$$+\iiint\limits_{V_{эфф}}\left\{\left[\Delta\rho\left(\vec{x}_1\right)+\Delta\rho^*\left(\vec{x}_1\right)\right]\omega^2 u^p\left(\vec{x}_1\right)G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)-\right.$$

$$\left.-\left[\Delta c_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)+\Delta c^*_{pjkl}\left(\vec{x}_1\right)\right]\frac{\partial u^l}{\partial x_1^k}\left(\vec{x}_1\right)\frac{\partial}{\partial x_1^j}G_{ip}\left(\vec{x},\vec{x}_1\right)\right\}d\vec{x}_1. \quad (26)$$

Интегрирование в уравнении (26) производится по эффективному объему неоднородности с учетом равенств (5) и (6) и свойств характеристических функций области.

Уравнение (26) описывает рассеяние (гармонических) упругих волн локальной предварительно напряженной неоднородностью независимо от того, ограничена ли эта неоднородность поверхностью раздела, или ее параметры меняются непрерывно в некотором переходном слое. Это уравнение является аналогом уравнения Липмана-Швингера квантово-механической теории рассеяния [2].

Решение основной задачи теории рассеяния. Основной задачей теории рассеяния является задача нахождения последовательности состояний объекта исследования «предварительно напряженная неоднородность + волновое поле». Решение этой задачи на основе системы интегральных уравнений (26) для реалистичных моделей можно получить, очевидно, только путем численного решения уравнений системы, например, методом последовательных приближений:

$$u^i_{(n+1)}(\vec{x}) = u^i_{in}(\vec{x}) + \iiint\limits_{V_{\text{эфф}}} \Big\{ \big[\Delta\rho(\vec{x}_1) + \Delta\rho^*(\vec{x}_1) \big] \omega^2 u^p_{(n)}(\vec{x}_1) G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) - \big[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) + \Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1) \big] \frac{\partial u^l_{(n)}}{\partial x^k_1}(\vec{x}_1) \frac{\partial}{\partial x^j_1} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) \Big\} d\vec{x}_1. \quad (27)$$

В формуле (27) нижний индекс n у компоненты $u^p_{(n)}$ волнового поля означает номер итерации. Впервые результаты по численному моделированию рассеяния плоских упругих волн на основе уравнения (26) для более простого случая неоднородности вещественного состава были опубликованы в работе [8].

В случае, когда включение слабоконтрастное по вещественному составу и по предварительным напряжениям, – флуктуации плотности и упругих модулей обоих типов малы, и в (27) можно ограничиться первым приближением

$$u^i(\vec{x}) = u^i_{in}(\vec{x}) + \iiint\limits_{V_{\text{эфф}}} \Big\{ \big[\Delta\rho(\vec{x}_1) + \Delta\rho^*(\vec{x}_1) \big] \omega^2 u^p_{in}(\vec{x}_1) G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) - \big[\Delta c_{pjkl}(\vec{x}_1) + \Delta c^*_{pjkl}(\vec{x}_1) \big] \frac{\partial u^l_{in}}{\partial x^k_1}(\vec{x}_1) \frac{\partial}{\partial x^j_1} G_{ip}(\vec{x}, \vec{x}_1) \Big\} d\vec{x}_1. \quad (28)$$

Приближение (28), носящее название *первого приближения Борна*, позволяет с достаточной точностью описать процесс рассеяния для слабоконтрастных включений.

Присутствие частных производных от искомых функций под интегралом в уравнениях (26) приводит к определенным техническим трудностям в процессе численного моделирования. Отметим, что их наличие в интегральных уравнениях (26) связано с тем, что при получении уравнений мы исходили из системы дифференциальных уравнений (8) с частными производными второго порядка – уравнений Ламе. Иной подход к выводу интегральных уравнений задачи рассеяния акустических, упругих и электромагнитных волн описан в работе одного из авторов [3]. Распространение результатов работы [3] на рассматриваемый случай предварительно напряженной неоднородности является ближайшей задачей авторов.

Выводы. В статье разработан алгоритм решения задачи рассеяния упругих (сейсмических) волн предварительно напряжённой уединённой неоднородностью вещественного состава. Модель может описывать большое число ситуаций, возникающих в динамической сейсморазведке. Собственно алгоритм разработан на основе обычной теории рассеяния без использования общей теории распространения упругих волн в предварительно напряжённой среде. В ближайшее время авторы предполагают опубликовать результаты численного моделирования, которые позволят предложить конкретные рекомендации для сейсморазведки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Т. 1. М.: Мир, 1981. 280 с.
2. Тейлор Дж. Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений. М.: Мир, 1975. 565 с.
3. Сурнев В. Б. О рассеянии упругих волн локализованной неоднородностью // Известия АН СССР. Физика Земли. 1988. № 2. С. 9–19.
4. Сурнев В. Б. Математическое моделирование. Непрерывные детерминированные модели. Екатеринбург: Изд-во УГГУ, 2012. 689 с.
5. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. М.: Мир, 1982. 334 с.
6. Hudson J. A. The Scattering of Elastic Waves by Granular Media // Quart Journal Mech. and Applies Math. 1968. Vol. XXI. Pt. 4. p. 487–502.
7. Pao Y. H., Varatharajuly V. Huygens principle, radiation conditions, and integral formulas for the scattering of elastic waves //J. Acoust. Soc. Amer. 1976. Vol. 59. № 6. p. 1361–1371.
8. Сурнев В. Б. Численное решение задачи рассеяния упругих волн ограниченным телом // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1988. № 4. С. 87–93.
9. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.

Сурнев Виктор Борисович – заведующий кафедрой математики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: sournev@yandex.ru

Исламгалиев Дмитрий Владимирович – старший преподаватель кафедры математики. 620144, г. Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30, Уральский государственный горный университет. E-mail: dif1205@mail.ru