

# ТЕОРИЯ РАСЧЕТА УСТОЙЧИВОСТИ ОТКОСОВ И ОСНОВАНИЙ. Расчет анизотропных, неоднородных и подработанных откосов\*

А. В. Жабко

## THEORY OF CALCULATION OF THE STABILITY OF SLOPES AND BASES. Calculation of anisotropic, heterogeneous and undermined slopes

A. V. Zhabko

This article is the third part of the published work on the creation of a unified theory of calculating the stability of slopes. There is no theory for arbitrary geological conditions. Existing individual calculation methods have significant drawbacks. Basically, methodology for calculating the stability of inhomogeneous and undermined slopes does not exist. As for the anisotropic slopes, nowadays there is only one method of calculation. This methodology is based on the fact that the break point of sliding surface satisfies the conditions of the ordinary and special marginal Coulomb balance. However, this technique has some significant drawbacks. The main drawback of said method is that when one determines the bend angle of sliding surface he has to neglect the influence of the stress state (principal stresses), and as a result, a certain bend angle does not depend on the angle of incidence of surface weakening.

Methods of study of this work are variational, differential and integral calculus and the theory of stability of homogeneous slopes, which was published earlier.

In the first part of the research author examines the general theory of determining of the bend angles of sliding surfaces in the transition from one lithological layer to another and a bend on the weakening surface. The research presents a calculation for anisotropic slope in the case where weakening surface entirely coincides with the sliding surface.

In the second part of the research author solves specific examples on the stability of an inhomogeneous, anisotropic and undermined slopes and describes in detail the procedure for solving of the problems. One can find a comprehensive mathematical apparatus for the implementation of these solutions. All solutions are given in strict mechanical and mathematical formulation.

Keywords: slope; anisotropic slope; inhomogeneous slope; undermined slope; slope angle; angle of internal friction; cohesion; height of the slope; limit equilibrium method; the condition of equilibrium; stability; sliding surface; weakening the surface; bend angle; the angle of rupture.

Статья является третьей частью публикуемой работы по созданию единой теории расчета устойчивости откосов в произвольных горно-геологических условиях, которой пока не существует. Имеющиеся на данный момент отдельные расчетные способы обладают рядом существенных недостатков. В принципе методики расчета устойчивости неоднородных и подработанных откосов вообще отсутствуют. Что касается анизотропных откосов, то здесь необходимо отметить, что на сегодняшний день имеется единственная методика расчета. Данная методика основана на том, что в точке излома поверхности скольжения выполняются условия обычного и специального предельного кулоновского равновесия. Однако данная методика имеет ряд существенных недостатков, главный из которых – пренебрежение влиянием напряженного состояния (главных напряжений) при определении угла излома поверхности скольжения, в следствие чего определенный угол излома не зависит от угла падения поверхности ослабления. Методами исследования настоящей работы являются вариационное, дифференциальное и интегральное исчисления, а также теория устойчивости однородных откосов, которая опубликована ранее. В первой части работы рассматривается общая теория определения углов излома поверхности скольжения при переходе из одного литологического слоя в другой и при изломе на поверхности ослабления. Показано, как рассчитывается анизотропный откос в случае, когда поверхность ослабления целиком совпадает с поверхностью скольжения. Во второй части исследования решаются конкретные примеры на устойчивость неоднородного, анизотропного и подработанного откосов. Подробно описывается порядок решения рассматриваемых задач. Приводится исчерпывающий математический аппарат для реализации данных решений. Все решения даны в строгой механико-математической постановке.

Ключевые слова: откос; анизотропный откос; неоднородный откос; подработанный откос; угол откоса; угол внутреннего трения; сцепление; высота откоса; метод предельного равновесия; условие равновесия; устойчивость; поверхность скольжения; поверхность ослабления; угол излома; угол разрыва.

Ранее до сих пор рассматривались откосы, сложенные однородными массивами или массивами, которые можно привести к таковым посредством статистического усреднения механических характеристик. Однако реальные массивы зачастую нельзя рассматривать как однородные и изотропные материалы, и прежде всего речь идет об их механических свойствах. При построении расчетных схем предполагалось, что характеристики паспорта прочности являются постоянными величинами во всей области. Пусть теперь сцепление  $C$  и коэффициент внутреннего трения  $f$  зависят от координат площадки скольжения и её наклона. В этом случае силовой функционал, очевидно, примет вид:

$$\int \left[ \frac{\gamma(\hat{y} - y)(y' - f(x, y, y')) - C(x, y, y')(1 + y'^2)}{1 + y'^2} \right] dx.$$

Составив уравнение Л. Эйлера и решив его, получим функцию поверхности скольжения при произвольных законах распределения механических характеристик пород откоса. Однако на практике функции распределения значений механических характеристик неизвестны, причем чаще всего они изменяются дискретно при переходе от одного литологического слоя к другому, т. е. функции терпят разрыв и являются кусочно-нелинейными.

На сегодняшний день существует, пожалуй, один концептуальный подход к оценке устойчивости анизотропных откосов, основанный на выполнении в точке излома поверхности скольжения как обычного предельного равновесия, так и специального. Данный способ был предложен Г. Л. Фисенко в 1964 г. [1] и сводится к определению углов излома для полого- и крутопадающей поверхностей ослабления по формулам:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left[ \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} (1 - \eta) \right];$$

$$\theta' = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi - \varphi'}{2} - \frac{1}{2} \arcsin \left[ \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi} (1 - \eta) \right], \quad (1)$$

где  $\eta = \frac{C \operatorname{ctg} \varphi - C' \operatorname{ctg} \varphi'}{C \operatorname{ctg} \varphi + \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)}$ ;  $C, C'$  – соответственно сцепление пород

вкост слоистости и по ней;  $\varphi$  и  $\varphi'$  – соответственно угол внутреннего трения пород и угол трения по контактам;  $\sigma_1, \sigma_3$  – главные напряжения в точке излома.

Несмотря на то, что данное решение в те годы носило революционный характер, оно имеет ряд очевидных недостатков:

1) предположение о том, что в точке излома площадка скольжения отклонена от направления действия  $\sigma_1$  на угол  $\pi/4 - \varphi/2$  для произвольной формы откоса и нагрузки на него, бездоказательно (данный постулат лежит в основе способа);

2) условие специального предельного равновесия возможно не для всех профилей откоса, в частности, оно не выполняется для вогнутых откосов;

3) для определения угла излома необходимо располагать значениями главных напряжений в точке излома (1), определить которые не представляется возможным;

4) если пренебречь влиянием главных напряжений на угол излома,

\* Первая часть статьи опубликована в вып. 4(40) за 2015 г., с. 45–57.

что и предлагал Г. Л. Фисенко, то значение последнего становится инвариантным (независимым) относительно угла наклона поверхности ослабления.

**Анизотропный откос**

Под анизотропией в общем случае будем понимать систему поверхностей ослабления с характеристиками паспорта прочности  $C'$  и  $f' = \text{tg } \varphi'$ , как правило, меньшими показателей прочности массива  $C$  и  $\varphi$ . Рассмотрим вначале произвольный плоский откос, разрушение которого произойдет по поверхности скольжения, полностью совпадающей с плоской поверхностью ослабления (рис. 1). Из постановки задачи имеем условие  $\alpha > \beta$ . Если  $\beta < \varphi'$ , то разрушение откоса произойти не может, поэтому будем исходить из неравенства  $\beta > \varphi'$ .

Поместим начало прямоугольной системы координат в точку выхода поверхности ослабления в откос и, используя геометрические соотношения для высоты трещины отрыва и ширины призмы смещения, получим:

$$h' = \frac{C'}{\gamma} \cdot \frac{1 + \text{tg}^2 \beta}{\text{tg } \beta - \text{tg } \varphi'} = \frac{C'}{\gamma} \cdot \frac{\cos \varphi'}{\cos \beta \sin(\beta - \varphi')}, a = \frac{H(1 - \text{tg } \beta \text{ctg } \alpha) - h'}{\text{tg } \beta}.$$

Условие равновесия призмы смещения будет иметь вид:

$$\int_0^{\text{Hctg } \alpha} [\gamma(kx - \text{tg } \beta x)(\text{tg } \beta - f') - C'(1 + \text{tg}^2 \beta)] dx + \int_{\text{Hctg } \alpha}^{\text{Hctg } \alpha + a} [\gamma(H - \text{tg } \beta x)(\text{tg } \beta - f') - C'(1 + \text{tg}^2 \beta)] dx = 0.$$

Отсюда предельная высота откоса выразится зависимостью:

$$H = h' \frac{\text{tg } \alpha + \sqrt{\text{tg } \alpha \text{tg } \beta}}{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta} = \frac{h'}{1 - \sqrt{\text{ctg } \alpha \text{tg } \beta}}. \tag{2}$$

Формула (2) рекомендуется Правилами обеспечения устойчивости откосов [2] и получена из условий геометрической статики. Однако, как показано ранее, она является следствием наиболее общего условия равновесия.

Рассмотрим теперь наиболее общий случай потери устойчивости анизотропным откосом и методику определения его предельных параметров (рис. 2). В этом случае поверхность скольжения может частично совпадать с поверхностями анизотропии и проходить вкrest неё, подобно поверхности в однородном откосе. Условие равновесия, а также угол излома  $\theta$  существенно зависят от координат точек излома, угла падения поверхностей ослабления, а также от физико-механических свойств пород вдоль плоскостей анизотропии и вкrest неё.

Ограничимся рассмотрением следующей расчетной схемы. Пусть в массиве имеются плоские поверхности ослабления, падающие в сторону выработанного пространства под углом  $\beta$  к оси  $x$ . В этом случае поверхность скольжения может частично совпадать с поверхностями ослабления.

Необходимо определить условие в точке пересечения поверхности ослабления и поверхности скольжения при том, что угол наклона поверхности скольжения в точке излома  $\theta > \varphi$  (данное условие, вообще говоря, не принципиально, в противном случае изменится только условие в точке излома). Для плоских поверхностей скольжения условие равновесия, без учета внешних сил, имеет вид:

$$\int [\gamma(\bar{y} - \text{tg } \beta x - g)(\text{tg } \beta - f') - C'(1 + \text{tg}^2 \beta)] dx = 0,$$

где  $g$  – постоянная.

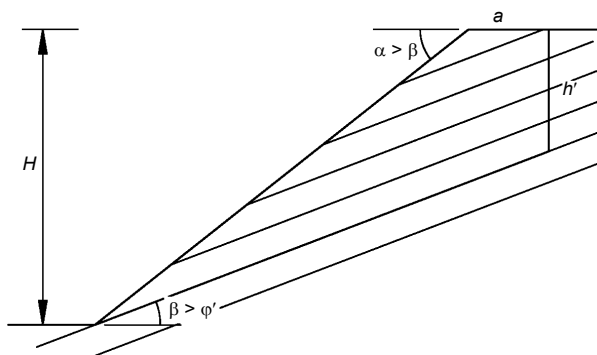


Рисунок 1. Схема к расчету предельных параметров анизотропного откоса / Figure 1. The scheme for the calculation of the limiting parameters of anisotropic slope.

Поместим начало системы координат в точку пересечения поверхности скольжения или поверхности ослабления с откосом и получим следующую задачу вариационного исчисления (объемный вес постоянный):

$$\int_{x_1}^{x_0} \frac{(\bar{y} - y)(y' - f) - \lambda(1 + y'^2)}{1 + y'^2} dx + \int_{x_0}^{x_2} \left[ (\bar{y} - \text{tg } \beta x - g)(\text{tg } \beta - f') - \frac{C'}{\gamma}(1 + \text{tg}^2 \beta) \right] dx \rightarrow \text{extr}. \tag{3}$$

Условие в точке излома поверхности скольжения имеет вид [3]:

$$F_1 + (\Phi' - y_1') F_{1y_1} = F_2 + (\Phi' - y_2') F_{2y_2}, \tag{4}$$

где  $F_1, F_2$  – подынтегральные выражения слагаемых (3);  $F_{1y_1}, F_{2y_2}$  – частные производные подынтегральных выражений по производной функции поверхности скольжения;  $\Phi'$  – производная функции, по которой перемещается точка разрыва (поверхность ослабления).

Условие (4) запишется в виде:

$$\frac{\text{tg } \psi - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg}^2 \psi} - (\text{tg } \beta - \text{tg } \varphi') + (\text{tg } \beta - \text{tg } \psi) \frac{1 + 2\text{tg } \varphi \text{tg } \psi - \text{tg}^2 \psi}{(1 + \text{tg}^2 \psi)^2} = \frac{\lambda - (C' / \gamma)(1 + \text{tg}^2 \beta)}{h}, \tag{5}$$

где  $\psi$  – угол наклона поверхности скольжения к оси  $x$  (к горизонту) в точке преломления;  $h$  – глубина точки излома (расстояние по вертикали от поверхности откоса или бермы до точки излома).

Рассмотрим задачу о преломлении поверхности скольжения вследствие её перехода в литологический слой с иными механическими характеристиками. Аналогом поставленной задачи является задача о преломлении луча света на границе сред с разными оптическими плотностями в постановке принципа Ферма (1660). Примем  $\psi > \varphi$  (не является принципиальным условием и принимается только для конкретики) – угол наклона поверхности скольжения к оси  $x$  до преломления;  $\beta$  – угол наклона контакта литологических слоев к оси  $x$ ;  $\omega > \varphi'$  – угол наклона поверхности скольжения к оси  $x$  после преломления (слой с параметром  $\lambda' = C' / \gamma n = (C' / C)\lambda$ );  $C', \varphi'$  – механические характеристики литологического слоя, в который переходит поверхность скольжения. Составляя выражения, подобные (3) и (4), с использованием первого функционала (4) (берется именно данный функционал, так как углы поверхностей в точке излома превышают соответствующие углы внутреннего трения) получим уравнение:

$$\frac{\text{tg } \psi - \text{tg } \varphi}{1 + \text{tg}^2 \psi} - \frac{\text{tg } \omega - \text{tg } \varphi'}{1 + \text{tg}^2 \omega} + (\text{tg } \beta - \text{tg } \psi) \frac{1 + 2\text{tg } \varphi \text{tg } \psi - \text{tg}^2 \psi}{(1 + \text{tg}^2 \psi)^2} - (\text{tg } \beta - \text{tg } \omega) \frac{1 + 2\text{tg } \varphi' \text{tg } \omega - \text{tg}^2 \omega}{(1 + \text{tg}^2 \omega)^2} = \frac{\lambda - \lambda'}{h}. \tag{6}$$

Анализируя условие (6), замечаем, что в случае  $C = C', \varphi = \varphi'$  преломления поверхности скольжения не происходит, т. е.  $\psi = \omega$ . Кроме того очевидно, что поверхность скольжения не может после преломления

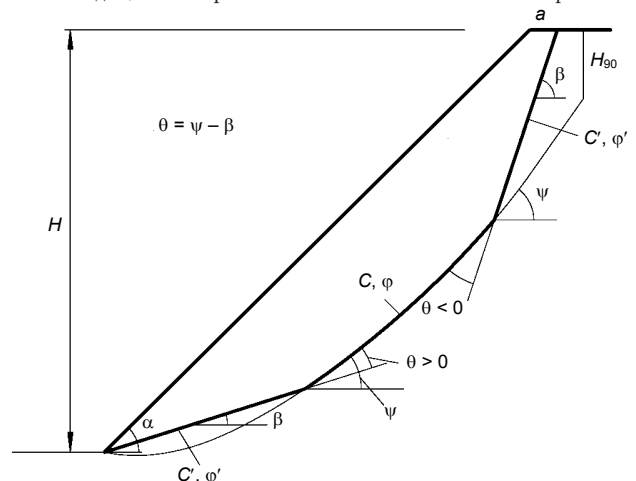


Рисунок 2. Поверхность скольжения в анизотропном откосе / Figure 2. The sliding surface in an anisotropic slope.

вернуться в первоначальный литологический слой, т. е. предельным значением угла  $\omega$  является угол  $\beta$ . В этом случае скольжение произойдет по поверхности, совпадающей с контактом. Положив в уравнении (6)  $\omega = \beta$ , получим равенство левых частей (5) и (6).

**Пример расчета неоднородного откоса**

Необходимо определить предельную высоту откоса  $H$ , состоящего из двух горизонтально залегающих слоев ( $\beta = 0^\circ$ ); верхний слой имеет мощность, равную  $1/3H$ , при следующих условиях (нумерация слоев снизу):

$$\alpha = 40^\circ; \gamma = \gamma_1 = 2,5 \text{ т/м}^3; C_1 = 5 \text{ т/м}^2; C = 10 \text{ т/м}^2; \varphi_1 = 28^\circ; \varphi = 33^\circ.$$

Предположим, что в точке излома поверхности скольжения выполняются условия  $\psi > \varphi$ ,  $\omega > \varphi_1$ , а абсцисса точки излома  $x_0$  находится под откосом. Тогда уравнения поверхности скольжения в нижнем слое имеют вид:

$$kx - y_1 = \lambda \frac{(kf - 1)y_1'^2 + 2(k + f)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2f^2y_1' + k - f + kf^2} \equiv \lambda \eta_1(p),$$

$$- \text{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \varphi}{2} \right) \leq y_1' \leq \text{tg} \varphi,$$

$$kx - y_2 = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \cdot \frac{(1 + y_2'^2)}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f} \equiv \lambda \eta_2(p),$$

$$y_2' > \text{tg} \varphi,$$

где  $\eta(p)$  – некоторая функция параметра  $p \equiv y'$ .

Произвольная постоянная для первого уравнения получена из условия трансверсальности на пересечении поверхности скольжения с откосом, а для второго – из условия равенства производных в точке  $y_1' = y_2' = \text{tg} \varphi$ .

Уравнение поверхности скольжения под откосом после преломления имеет вид:

$$kx - y_3 = (\lambda_1 + d_1) \frac{(1 + y_3'^2)}{2y_3'^3 - (k + 3f_1)y_3'^2 + 2kf_1y_3' + k - f_1} \equiv (\lambda_1 + d_1) \eta_3(p).$$

Для определения углов поверхности скольжения по обе стороны от точки излома, абсциссы и глубины точки излома  $h$ , а также параметра  $\lambda_1 + d_1$  составляем условия:

$$\frac{\text{tg} \psi - \text{tg} \varphi}{1 + \text{tg}^2 \psi} - \frac{\text{tg} \omega - \text{tg} \varphi_1}{1 + \text{tg}^2 \omega} + (\text{tg} \beta - \text{tg} \psi) \frac{1 + 2\text{tg} \varphi \text{tg} \psi - \text{tg}^2 \psi}{(1 + \text{tg}^2 \psi)^2} - (\text{tg} \beta - \text{tg} \omega) \frac{1 + 2\text{tg} \varphi_1 \text{tg} \omega - \text{tg}^2 \omega}{(1 + \text{tg}^2 \omega)^2} = \frac{\lambda(1 - C_1/C)}{h};$$

$$h = (\lambda_1 + d_1) \frac{(1 + \text{tg}^2 \omega)^2}{2\text{tg}^3 \omega - (k + 3f_1)\text{tg}^2 \omega + 2kf_1\text{tg} \omega + k - f_1},$$

$$h = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \cdot \frac{(1 + \text{tg}^2 \psi)^2}{2\text{tg}^3 \psi - (k + 3f)\text{tg}^2 \psi + 2kftg \psi + k - f}$$

$$\int_{\text{tg}(\frac{\alpha + \varphi}{2}, \frac{\pi}{4})}^{\text{tg} \varphi} \frac{\lambda \eta_1'(p)}{k - p} dp + \int_{\text{tg} \varphi}^{\text{tg} \psi} \frac{\lambda \eta_2'(p)}{k - p} dp = x_0, \quad x_0 = \frac{h + 2H/3}{k},$$

где  $\eta'(p)$  – производная функции по параметру  $p$ .

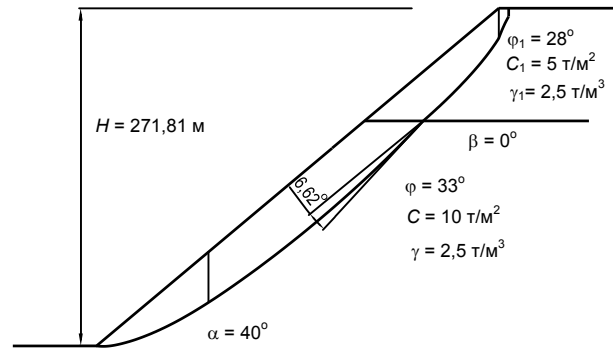
Уравнение поверхности скольжения под бермой имеет вид:

$$(H - y_4) = \frac{C_1(y_4'^2 - 1)}{\gamma \text{tg} \varphi_1},$$

Производную поверхности скольжения на границе участков откоса и бермы, со стороны откоса  $s$  определяем из условия:

$$(f_1 + k)s^4 + 4(1 - kf_1)s^3 + 2(kf_1^2 - 3f_1 - 2k)s^2 + 4f_1(f_1 + k)s + f_1 - k - 2kf_1^2 = 0.$$

А производную со стороны бермы  $t$  определим из условия равенства



**Рисунок 3. Поверхность скольжения в неоднородном откосе / Figure 3. The sliding surface in inhomogeneous slope.**

ординат (глубин) в точке стыка участков поверхностей скольжения, т. е.:

$$(\lambda_1 + d_1) \frac{(1 + s^2)^2}{2s^3 - (k + 3f_1)s^2 + 2kf_1s + k - f_1} = \frac{C_1(t^2 - 1)}{\gamma f_1}.$$

И, наконец, система уравнений, требующая выполнения условия предельного равновесия и осуществляющая связь  $\lambda$  и  $H$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_{\text{tg}(\frac{\alpha + \varphi}{2}, \frac{\pi}{4})}^{\text{tg} \psi} \left[ \frac{\gamma(p - f)}{1 + fp} \lambda \eta_1(p) - \frac{C(1 + p^2)}{1 + fp} \right] \frac{\lambda \eta_1'(p)}{k - p} dp + \int_{\text{tg} \varphi}^{\text{tg} \psi} \left[ \frac{\gamma(p - f)}{1 + p^2} \lambda \eta_2(p) - C \right] \frac{\lambda \eta_2'(p)}{k - p} dp + \\ & + \int_{\text{tg} \varphi}^s \left[ \frac{\gamma(p - f_1)(\lambda_1 + d_1) \eta_3(p) - C_1}{k - p} \right] \frac{(\lambda_1 + d_1) \eta_3'(p)}{k - p} dp + \frac{2C_1^2}{\gamma f_1} \times \\ & \int_{\text{tg}(\frac{\pi}{4}, \frac{\alpha_1}{2})}^s \left[ \frac{(p^2 - 1)(p - f_1)}{f_1} - (1 + p^2) \right] dp = 0; \\ & \int_{\text{tg}(\frac{\alpha + \varphi}{2}, \frac{\pi}{4})}^{\text{tg} \psi} \frac{\lambda \eta_1'(p)}{k - p} dp + \int_{\text{tg} \varphi}^{\text{tg} \psi} \frac{\lambda \eta_2'(p)}{k - p} dp + \int_{\text{tg} \varphi}^s \frac{(\lambda_1 + d_1) \eta_3'(p)}{k - p} dp = \frac{H}{k}. \end{aligned} \right.$$

Данных уравнений достаточно для определения всех неизвестных. Таким образом, после решения системы полученных уравнений определяются неизвестные, необходимые для построения предельной поверхности скольжения (рис. 3). По результатам численного решения системы приведённых уравнений определены параметры для построения наиболее слабой поверхности скольжения в неоднородном откосе и его предельная высота:

$$\{s, t, \lambda, \lambda_1 + d_1, h, x_0, \text{tg} \psi, \text{tg} \omega, H\}^T = \{1, 64, 2, 72, 4, 99, 7, 14, 39, 49, 263, 02, 1, 09, 0, 87, 271, 81\}^T.$$

В процессе решения рассмотренных выше уравнений может быть определен любой из параметров, например сцепление, необходимое для выполнения условия предельного равновесия, при заданных высоте и угле откоса.

**Пример расчета анизотропного откоса**

Необходимо определить предельную высоту откоса  $H$ , имеющего поверхность ослабления, выходящую в его основание под углом  $\beta = 20^\circ$ . Физико-механические характеристики пород и поверхности ослабления:  $\gamma = 2,5 \text{ т/м}^3$ ;  $C' = 5 \text{ т/м}^2$ ;  $C = 10 \text{ т/м}^2$ ;  $\varphi' = 18^\circ$ ;  $\varphi = 30^\circ$ ; угол откоса  $\alpha = 40^\circ$ .

Предположим, что угол наклона криволинейной части поверхности скольжения в точке преломления поверхности скольжения  $\psi > \varphi$ , и точка преломления находится под откосом, тогда её форма описывается уравнениями:

$$kx - y_2 = d \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f} \equiv d \eta_2(p), \quad y_2' > \text{tg} \varphi, \text{ откос};$$

$$(H - y_3) = \frac{C(y_3'^2 - 1)}{\gamma \text{tg} \varphi}, \text{ берма},$$

где  $d$  – постоянная.

Тангенс угла наклона поверхности скольжения в точке стыка откоса и бермы со стороны откоса  $s$  определится из уравнения:

$$(f + k)s^4 + 4(1 - kf)s^3 + 2(kf^2 - 3f - 2k)s^2 + 4f(f + k)s + f - k - 2kf^2 = 0.$$

Производную поверхности скольжения со стороны бермы, как и раньше, определяем из условия равенства ординат:

$$d \frac{(1 + s^2)^2}{2s^3 - (k + 3f)s^2 + 2kfs + k - f} = \frac{C(t^2 - 1)}{\gamma f}$$

Условие в точке стыка имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} + (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \psi) \frac{1 + 2\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg}^2 \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2} - (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi') = \frac{\lambda - (C' / \gamma)(1 + \operatorname{tg}^2 \beta)}{h}$$

Высота точки излома выражается уравнениями:

$$h = d \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2}{2\operatorname{tg}^3 \psi - (k + 3f)\operatorname{tg}^2 \psi + 2kft\psi + k - f}, \quad h = kx_0 - \operatorname{tg} \beta x_0$$

Абсцисса точки излома:

$$\frac{H}{k} - \int_{\operatorname{tg} \psi}^s \frac{d\eta_2'(p)}{k-p} dp = x_0,$$

где  $\eta_2'(p)$  – производная функции по параметру  $p$ .

Система уравнений для определения  $d$  и  $H$ :

$$\left\{ \begin{aligned} & \int_0^{x_0} \left[ \gamma(kx - \operatorname{tg} \beta x)(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \varphi') - C'(1 + \operatorname{tg}^2 \beta) \right] dx + \int_{\operatorname{tg} \psi}^s \left[ \frac{p-f}{1+p^2} d\eta_2'(p) - C \right] \frac{d\eta_2'(p)}{k-p} dp + \\ & + \frac{2C^2}{\gamma f} \int_{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}^t \left[ \frac{(p^2-1)(p-f)}{f} - (1+p^2) \right] dp = 0; \\ & \operatorname{tg} \beta x_0 + \int_{\operatorname{tg} \psi}^s \frac{d\eta_2'(p)}{k-p} p dp + \frac{2C}{\gamma f} \int_{\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2})}^t p dp + \frac{2C}{\gamma} \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) = H. \end{aligned} \right.$$

Данных уравнений достаточно для определения всех неизвестных. По результатам численного решения системы уравнений получены следующие значения геометрических параметров откоса и поверхности скольжения:

$$\{\lambda, s, t, d, h, x_0, \operatorname{tg} \psi, H\}^T = \{7,74, 1,62, 2,23, 7,94, 33,47, 70,45, 1,41, 64,71\}^T.$$

На рис. 4 показаны потенциальная поверхность скольжения и предельные параметры анизотропного откоса для рассмотренного примера.

В заключение отметим, что уравнениями (5), (6) не исчерпываются все условия в точках излома, которые могут иметь место при решении задач для неоднородных и анизотропных откосов.

Таким образом, необходимо решать задачи для анизотропного и неоднородного откосов в строгой теоретической постановке. В данных расчетах поверхность скольжения и граничные условия для её построения обеспечивают максимум разности сдвигающих и удерживающих сил (обобщенной силе) на возможном перемещении призмы смещения.

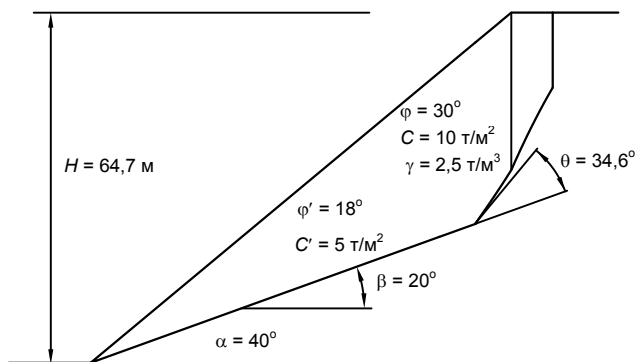


Рисунок 4. Поверхность скольжения в анизотропном откосе / Figure 4. The sliding surface in an anisotropic slope.

В принципе, расчет устойчивости подработанных откосов или откосов при наличии в породах карста (с известным местоположением) ничем не отличается от расчета неоднородного откоса. И действительно, подработка бортов карьера влечёт за собой снижение прочностных характеристик массива и прежде всего величины сцепления. То же можно сказать и про карст, образующий пустотность. Поэтому задача в этом случае сводится к определению условий преломления поверхности скольжения на карсте или ослабленном подземными горными работами участке массива горных пород.

**Пример расчета откоса, подработанного подземными горными работами**

Пусть требуется определить размер целика, горизонтально залегающего тела полезного ископаемого, необходимого для обеспечения устойчивого состояния борта карьера (рис. 5).

Заменим с незначительной погрешностью границу областей плавных сдвижений и сдвижений с разрывом сплошности прямой линией, проведенной под углом разрыва  $\beta''$  (см. рис. 5), и поместим начало координат в нижнюю точку откоса. Уравнение данной границы будет иметь вид:

$$y = -\operatorname{tg} \beta'' (x - d), \tag{7}$$

где  $d$  – размер целика.

Будем предварительно считать, что поверхность скольжения преломится на границе областей под откосом, а углы её наклона по обе стороны от границы будут превышать соответствующие углы внутреннего трения.

Пусть имеем борт карьера высотой  $H = 200$  м, углом  $\alpha = 40^\circ$ , физико-механические характеристики целиковой части массива горных пород равны:  $\gamma = 2,5$  т/м<sup>3</sup>;  $C = 10$  т/м<sup>2</sup>;  $\varphi = 35^\circ$ .

Вследствие подработки части прибортового массива его механические характеристики снизились и имеют следующие значения:  $\gamma_1 = 2,5$  т/м<sup>3</sup>;  $C_1 = 0$  т/м<sup>2</sup>;  $\varphi_1 = 30^\circ$ . Угол разрыва  $\beta'' = 70^\circ$ .

Поверхность скольжения, как и в рассмотренном примере для неоднородного откоса, будет состоять из четырёх участков. В целиковой части поверхность скольжения описывается, как и раньше, уравнениями:

$$kx - y_1 = \lambda \frac{(kf - 1)y_1'^2 + 2(k + f)y_1' + 1 - kf}{fy_1'^2 - 2fy_1' + k - f + kf^2} \equiv \lambda \eta_1(p),$$

$$-\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha + \varphi}{2} \right) \leq y_1' \leq \operatorname{tg} \varphi,$$

$$kx - y_2 = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \cdot \frac{(1 + y_2'^2)^2}{2y_2'^3 - (k + 3f)y_2'^2 + 2kfy_2' + k - f} \equiv \lambda \eta_2(p),$$

$$y_2' > \operatorname{tg} \varphi.$$

На границе областей с разными физико-механическими свойствами происходит излом поверхности скольжения, после излома поверхность скольжения под откосом описывается уравнением:

$$kx - y_3 = b \frac{(1 + y_3'^2)^2}{2y_3'^3 - (k + 3f_1)y_3'^2 + 2kf_1y_3' + k - f_1} \equiv b \eta_3(p),$$

где  $b$  – постоянная.

Так как породы в подработанной части массива не обладают сцеплением (связностью), наиболее опасная поверхность скольжения определяется не экстремумом функционала, а экстремумом функции разности сдвигающих и удерживающих сил на площадке среза. Наибольшее главное напряжение совпадает с весом пород, а угол

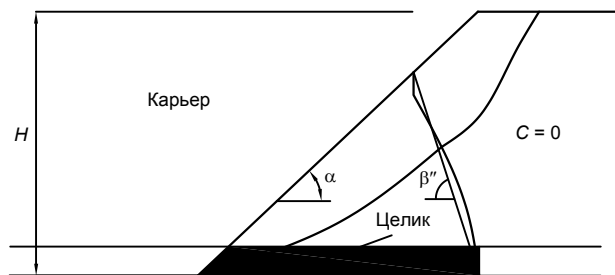


Рисунок 5. Схема подработанного откоса / Figure 5. The scheme of undermined slope.

наклона критической площадки не зависит от величины сцепления, поэтому уравнение поверхности скольжения имеет вид:

$$y_4 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) x + m, \quad (8)$$

где  $m$  – постоянная.

Сумма сил на участке бермы подсчитывается при помощи следующего интеграла:

$$\int [\gamma(H - y_4)(y_4' - f_1)] dx.$$

Условие в точке излома имеет вид:

$$\frac{\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg}^2 \psi} - \frac{\operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg} \varphi_1}{1 + \operatorname{tg}^2 \omega} + (-\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \psi) \frac{1 + 2\operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg}^2 \psi}{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2} - (-\operatorname{tg} \beta'' - \operatorname{tg} \omega) \frac{1 + 2\operatorname{tg} \varphi_1 \operatorname{tg} \omega - \operatorname{tg}^2 \omega}{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega)^2} = \frac{\lambda(1 - C_1 / C)}{h};$$

где  $\psi, \omega$  – соответственно углы наклона поверхности скольжения до и после преломления на границе областей;  $h$  – глубина точки излома.

Глубина точки излома определяется условиями:

$$h = b \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \omega)^2}{2\operatorname{tg}^3 \omega - (k + 3f_1) \operatorname{tg}^2 \omega + 2kf_1 \operatorname{tg} \omega + k - f_1},$$

$$h = \lambda \frac{1 + kf}{1 + f^2} \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 \psi)^2}{2\operatorname{tg}^3 \psi - (k + 3f) \operatorname{tg}^2 \psi + 2kf \operatorname{tg} \psi + k - f}.$$

Абсцисса точки излома с учетом (7) определяется уравнениями:

$$kx_0 - h = -\operatorname{tg} \beta'' (x_0 - d); \quad \int_{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}^{\operatorname{tg} \varphi} \frac{\lambda \eta'_1(p)}{k - p} dp + \int_{\operatorname{tg} \varphi}^{\operatorname{tg} \psi} \frac{\lambda \eta'_2(p)}{k - p} dp = x_0.$$

Тангенс угла наклона (производная) поверхности скольжения в точке стыка откоса и бермы, как и раньше, определяется из уравнения:

$$(f_1 + k)s^4 + 4(1 - kf_1)s^3 + 2(kf_1^2 - 3f_1 - 2k)s^2 + 4f_1(f_1 + k)s + f_1 - k - 2kf_1^2 = 0.$$

Постоянную  $m$  в уравнении поверхности скольжения под бермой (8) определим из условия равенства ординат в точке стыка участков поверхностей скольжения:

$$b \frac{(1 + s^2)^2}{2s^3 - (k + 3f_1)s^2 + 2kf_1s + k - f_1} = H - \left( \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{H}{k} + m \right).$$

Глубину поверхности скольжения в точке стыка участков откоса и бермы  $h_1$  определяем из условия:

$$h_1 = H - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \frac{H}{k} - m.$$

И, наконец, система уравнений, требующая выполнения условия предельного равновесия и осуществляющая связь  $\lambda, b$  и  $H$ :

**Андрей Викторович Жабко,**

кандидат технических наук, доцент  
zhabkoav@mail.ru

Уральский государственный горный университет  
Россия, Екатеринбург, ул. Куйбышева, 30

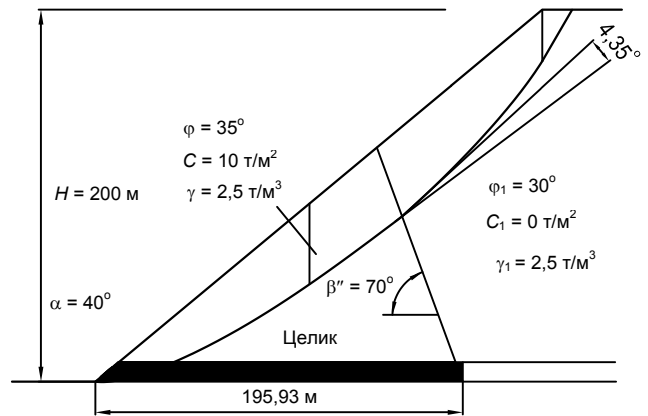


Рисунок 6. Пример расчета подработанного откоса / Figure 6. Example of calculating the undermined slope.

$$\left\{ \int_{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}^{\operatorname{tg} \varphi} \left[ \frac{\gamma(p - f)}{1 + fp} \lambda \eta_1(p) - \frac{C(1 + p^2)}{1 + fp} \right] \frac{\lambda \eta'_1(p)}{k - p} dp + \int_{\operatorname{tg} \varphi}^{\operatorname{tg} \psi} \left[ \frac{\gamma(p - f)}{1 + p^2} \lambda \eta_2(p) - C \right] \frac{\lambda \eta'_2(p)}{k - p} dp + \int_{\operatorname{tg} \omega}^{\operatorname{tg} \psi} \left[ \frac{\gamma(p - f_1)}{1 + p^2} b \eta_3(p) - C_1 \right] \frac{b \eta'_3(p)}{k - p} dp + \int_{H/k}^{H/h_1} \left[ \gamma \left( H - \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) x - m \right) (\sqrt{1 + f_1^2}) \right] dx = 0; \right.$$

$$\left. \int_{\operatorname{tg} \left( \frac{\alpha + \varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right)}^{\operatorname{tg} \varphi} \frac{\lambda \eta'_1(p)}{k - p} dp + \int_{\operatorname{tg} \varphi}^{\operatorname{tg} \psi} \frac{\lambda \eta'_2(p)}{k - p} dp + \int_{\operatorname{tg} \omega}^{\operatorname{tg} \psi} \frac{\lambda \eta'_3(p)}{k - p} dp = \frac{H}{k} \right.$$

Составленных ранее условий достаточно для определения всех неизвестных. По результатам численного решения рассматриваемого примера получены параметры, определяющие наиболее опасную поверхность скольжения и размер охранного целика:

$$\left\{ \operatorname{tg} \psi \operatorname{tg} \omega \ s \ \lambda \ b \ x_0 \ h \ h_1 \ m \ d \right\}^T = \{ 0,78 \ 0,91 \ 1,62 \ 3,80 \ 7,53 \ 163,57 \ 48,34 \ 27,57 - 240,41 \ 195,93 \}^T.$$

На рис. 6 приведены поверхность скольжения и целик, соответствующие предельному равновесию откоса для рассматриваемого примера. Размер целика должен составлять не менее  $d = 196$  м. Отметим, что из приведенных уравнений могут быть также определены предельная высота борта и угол устойчивого откоса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мочалов А. М. Расчет устойчивости слоистых откосов // Труды ВНИМИ. 1971. Сб. 83.
2. Правила обеспечения устойчивости откосов на угольных разрезах: утв. Госгортехнадзором РФ 16.03.98. СПб.: ГосНИИ горной геомеханики и маркшейдерского дела, 1998. 208 с.
3. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А. Курс вариационного исчисления. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1950. 296 с.

REFERENCES

1. Mochalov A. M. 1971, *Raschet ustoychivosti sloistykh otkosov* [Calculation of the stability of layered slope], *Trudy VNIMI* [Proceedings of VNIMI], Leningrad, vol. 83.
2. 1998, *Pravila obespecheniya ustoychivosti otkosov na ugol'nykh razrezakh: utv. Gosgortekhnadzorom RF 16.03.98*. [Rules to ensure the stability of slopes in the coal mines: approved by the State Technical Supervision of the Russian Federation 16.03.98], Saint-Petersburg, 208 p.
3. Lavrent'ev M.A., Lyusternik L.A. 1950, *Kurs variatsionnogo ischisleniya* [Variational calculus course], Moscow, 296 p.

**Andrey Viktorovich Zhabko,**

PhD, Associate Professor  
zhabkoav@mail.ru

Ural State Mining University  
Ekaterinburg, Russia